

## POGLAVLJE 1.

- 1.1. Osnovni koncept strujanja fluida;
- 1.2. Principi zakona o održanju. Generalni oblik transportne jednačine;
- 1.3. Zakon o održanju mase;
- 1.4. Zakon o održanju količine kretanja;
- 1.5. Zakon o održanju energije;
- 1.6. Pojednostavljeni matematički modeli;

### 1.1. Osnovni koncept strujanja fluida

Fluidi predstavljaju materije čija molekularna struktura ne pruža otpor različitim spoljašnjim silama: čak i najmanje od njih izazivaju deformaciju fluidnog djelića. Treba reći da značajne razlike postoje između gasova i tečnosti, iako se strujanje obje ove materije opisuje istim jednačinama održanja. U slučajevima koje će se razmatrati u ovom kursu, fluid se posmatra kao *continuum*, tj. kao kontinualna materija.

Strujanje fluida se ostvaruje uticajem spoljašnjih sila koje se generalno mogu podijeliti na dvije suštinski različite grupe. Prve su površinske sile kao što su sile pritiska, zatim smičuće sile uslijed viskoznosti fluida. Drugi tip sila koje može izazvati kretanje fluida su tzv. zapreminske sile kao što su gravitacija, sila uslijed rotacije, zatim sile izazvane postojanjem električnih i magnetnih polja u fluidu. Suštinska razlika između površinskih i zapreminskih sila odraziće se i u načinu diskretizacije ovih dviju vrsta sila.

Dok se skoro svi fluidi ponašaju slično pod dejstvom istih vrsta sila, među njima postoje značajne razlike u pogledu njihovih karakteristika. Karakteristike fluida moraju biti poznate u postupku diskretizacije odgovarajućih jednačina. Glavne karakteristike fluida od kojih zavisi njegovo ponašanje pod dejstvom različitih sila su gustina ( $\rho$ ) i viskoznost ( $\mu$ ). Ostale veličine kao što su Prandtl-ov broj, specifični toplotni kapacitet, površinski napon imaju uticaj na strujanje samo pod specifičnim uslovima, kada postoje veliki temperaturni gradijenti u fluidu. Treba napomenuti da fizičke karakteristike fluida nisu konstantne veličine već predstavljaju manje ili više poznate funkcije od nekih veličina stanja (najčešće temperature ili pritiska).

Kod mnogih strujanja uticaj viskoznosti je značajan samo u slojevima blizu zida dok je u velikom dijelu domena uticaj smičućih sila uslijed viskoznosti zanemarljiv. U ovom kursu uglavnom će biti tretirati tzv. Njutnovski fludi, tj. oni fludi kod kojih je zavisnost između smičućeg napona ( $\tau$ ) i gradijenta brzine u pravcu normale na strujanje fluida (linearan. Fludi kod kojih ova zavisnost nije linearna nazivaju se Ne-Njutnovski fludi. Na strujanje fluida obično utiču sile koje se javljaju uslijed odigravanja različitih fenomena. Jedan od najčešćih primjera u praksi je zagrijavanje ili hlađenje fluida uslijed čega dolazi do promjene gustine ( $\rho$ ) fluida i njegovog strujanja, što je u teoriji mehanike fluida poznato kao *prirodna konvekcija*. Promjena gustine fluida može biti izazvana i promjenom koncentracije fluida kod strujanja tečnosti sa rastvorima. Fazni prelaz koji se odigrava kod nekih procesa strujanja kao što su isparavanje, kondenzacija, otapanje ili očvršćavanje takođe ima značajan uticaj na strujanje fluida, i razmatra se uvođenjem posebnih jednačina ili pak dodatnih članova u jednačinama o održanju mase, energije i količine kretanja. Varijacije ostalih parametara kao što su viskoznost, površinski napon takođe mogu imati značajan uticaj na strujanje fluida, ali neće biti razmatrani u toku ovog kursa.

U ovom poglavlju biće prikazane jednačine o održanju mase, energije i količine kretanja u diferencijalnom obliku, kao i neki specijalni slučajevi strujanja koji se mogu izvesti iz glavnih jednačina zanemarujući pojedine članove u jednačinama. Osnovne bilansne jednačine biće prikazane u ovom poglavlju bez većih detalja vezanih za njihovo izvođenje, dok se detalji mogu naći u brojnoj literaturi vezanoj za kurseve iz Mehanike fluida i Prostiranja toplote i mase.

## 1.2. Principi zakona o održanju. Generalni oblik transportne jednačine

Osnovne jednačine o održanju mase, količine kretanja, energije ili hemijskog sastava obično se izražavaju u formi specifičnih veličina, što predstavlja veličinu po jedinici mase. Tako na primjer količina kretanja ( $m\vec{V}$ ) po jedinici mase ima jedinicu (m/s), dok je energija (J) po jedinici mase (J/kg). Za početak posmatrajmo generalizovanu specifičnu veličinu  $\phi$  za koju je potrebno definisati zakon o održanju. Na slici 1.1 prikazana je kontrolisana zapremina dimenzija  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ . Uprošćeno gledano zakon o održanju veličine  $\phi$  može se prikazati prostim izrazom: Akumulacija

veličine  $\phi$  u vremenskom intervalu  $\Delta\tau$  jednaka je razlici flukseva koje ulaze i izlaze kroz granice kontrolisane zapremine (CV) uvećan za vrijednost fluksa koji se generiše u samoj kontrolisanoj zapremini.

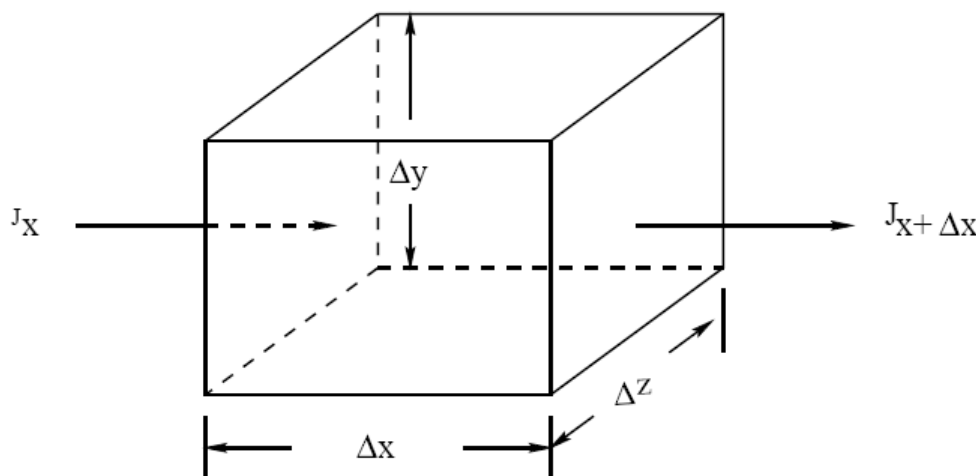
$$\text{Akumulacija } (\phi) = \text{Ulaz } (\phi) - \text{Izlaz } (\phi) + \text{Generacija } (\phi) \quad (1.1)$$

Ovaj prilaz u literaturi je poznat kao *Control Volume* prilaz (CV). Prvi član na lijevoj strani jednačine može se napisati u obliku:

$$\text{Akumulacija } (\phi) = (\rho\phi\Delta V)_{t+\Delta t} - (\rho\phi\Delta V)_t, \quad (1.2)$$

dok se član koji predstavlja generaciju može zapisati kao:

$$\text{Generacija } (\phi) = S\Delta V\Delta t. \quad (1.3)$$



Slika 1.1. Kontrolisana zapremina u dekartovim koordinatama

Na kraju razmotrimo i prva dva člana koji predstavljaju flukseve veličine  $\phi$  koji prolaze kroz granice kontrolisane zapremine. Na lijevoj strani fluks veličine  $\phi$  je  $J_x$  a na desnoj strani je vrijednost fluksa koji napušta kontrolisanu zapreminu  $J_{x+\Delta x}$ . Na sličan način moguće je napisati i flukseve za preostale stranice posmatrane kontrolisane zapremine. Neto vrijednost fluksa koji predstavlja razliku prvih dva člana na desnoj strani jednačine (1.1) za geometriju na slici (1.1) ima oblik:

$$(J_x - J_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z\Delta t + (J_y - J_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z\Delta t + (J_z - J_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y\Delta t \quad (1.4)$$

Do sada ništa nije rečeno o fizičkom mehanizmu na osnovu kojega se formira fluks veličine  $\phi$  na granicama kontrolisane zapremine. Za strujanja koja se u glavnom

javljaju u tehničkoj praksi i koja su od značaja za izučavanja u oblasti energetike fluks veličine  $\phi$  može se generisati na dva suštinski različita načina: difuzijom koja se odigrava na molekularnom nivou i konvekcijom koja je posledica kretanja fluida. Fluks difuzijom poznat kao Fourie - ov zakon (temperatura) ili Fick - ov zakon (koncentracija) ima oblik za pravac x:

$$J_{difuzije,x} = -\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (1.5)$$

dok se konvektivni fluks opisuje jednačinom:

$$J_{konvekcije,x} = \rho u \phi. \quad (1.6)$$

Sada kada su definisani ova dva fluksa generalni izraz za fluks na dvije stranice kontrolisane zapremine imaju sledeći oblik:

$$J_x = \left( \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_x, \quad (1.7)$$

$$J_{x+\Delta x} = \left( \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}. \quad (1.8)$$

Na sličan način dobijaju se slične jednačine za pravce y i z. Sada kada su definisani svi članovi za polaznu jednačinu (1.1) smjenom jednačina (1.2), (1.3), (1.4) koristeći jednačine (1.7) i (1.8), i dijeljem lijeve i desne strane sa  $\Delta V \Delta t$  dobija se sledeća jednačina:

$$\frac{(\rho \phi)_{t+\Delta t} - (\rho \phi)_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{(J_x - J_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(J_y - J_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(J_z - J_{z+\Delta z})}{\Delta z}, \quad (1.9)$$

koja ako se uzme da  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  i  $\Delta t \rightarrow 0$  prelazi u diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z}. \quad (1.10)$$

Smjenom jednačine (1.7) u poslednju jednačinu konačno se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \phi) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \end{aligned} \quad (1.11)$$

Na kraju mogu se napomenuti sledeći zaključci:

- diferencijalna jednačina izvedena je na osnovu usvojene geometrije kontrolisane zapremine koja je u principu mogla imati bilo kakav geometrijski oblik. Diferencijalna jednačina na kraju bi bila ista kao jednačina (1.11);
- jednačina je izvedena za specifičnu vrijednost funkcije  $\phi$  pa je za energiju njena jedinica (J/kg), za količinu kretanja je (m/s);
- jednačina je napisana tako da su sve veličine takve da su *po jedinici zapremine i jedinici vremena*.

### 1.3. Zakon o održanju mase

Zakon o održanju mase (jednačina kontinuiteta) dobija se kada se uzme da je transportna funkcija  $\phi=1$ , pa ako nema izvora ili ponora mase ( $S=0$ ) dobija se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (1.12)$$

Jednačina (1.12) može se napisati koristeći definiciju gradijenta i vektor brzine kao:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0. \quad (1.13)$$

Dekartov koordinatni sistem je u najčešćoj upotrebi u velikoj klasi problema u kojima se proučava strujanje fluida i razmjena toplote pa će mu biti posvećena posebna pažnja u nasvaku.

### 1.4. Zakon o održanju količine kretanja

Zakon o održanju količine kretanja (ili impulsa) predstavlja modifikovani drugi Njutnov zakon napisan u formi za fluide. Transportovana funkcija ( $\phi$ ) je za razliku od jednačine kontinuiteta sada vektorska veličina ( $K=m\vec{V}$ ) koja ako se uzme u obzir da mora biti izražena po jedinici mase prelazi u brzinu ( $K/m=\vec{V}$ ). Ako se pridržavajući naprijed navedenu nomenklaturu umjesto transportovane veličine  $\phi$  u

jednačinu (1.11) stavi vektor brzine  $\vec{V} = V(u, v, w)$ , dobijaju se tri diferencijalne jednačine o održanju količine kretanja za pravce x, y i z respektabilno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u) = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) + S_u' \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w v) = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right) + S_v' \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w w) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + S_w' \end{aligned} \quad (1.16)$$

gdje su na desnoj strani jednačine prikazane sile koja djeluje na fluidni djelić. Te sile se generalno mogu podijeliti na dvije suštinski različite vrste:

- površinske sile (pritisak, normalni i smičući napon u fluidu, površinski napon);
- zapreminske sile (gravitacija, centrifugalne sile, Koriolisova sila, elektromagnetne sile i sl.)

### 1.5. Zakon o održanju energije

Već naprijed je navedeno da se pojedini zakoni o održanju dobijaju kada se umjesto generalne transportne funkcije  $\phi$  uvrsti određena fizička veličina. U primjeru energijske jednačine, za slučaj kada se može zanemariti disipacija energije uslijed viskoznosti fluida i za male brzine strujanja, može se uzeti da je  $\phi = h$ , gdje je h (J/kg) specifična entalpija. Podrazumijevajući Forijeov zakon za opisivanje difuzionog člana u energijskoj jednačini energijska jednačina dobijaj sledeći oblik:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u h) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v h) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w h) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S_h' \quad (1.17)$$

Ili ako se uzme da je  $dh = c_p dT$ , koristeći skraćenu notaciju dobija se generalni vektorski oblik jednačine o održanju energije:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial \tau} + \nabla(\rho \cdot \vec{V} h) = \nabla \left( \frac{k}{c_p} \nabla h \right) + S_h. \quad (1.18)$$

Fenomeni strujanja fluida su najčešće vezani sa razmjenom toplote u mnogim problemima vezanim za tehničku praksu, pa je posmatranje procesa strujanja bez razmatranja energijske jednačine praktično nezamislivo.

### 1.6 Pojednostavljeni matematički modeli

Jednačine o održanju mase i količine kretanja su mnogo kompleksnije nego što se to čini na prvi pogled. One su nelineralne parcijalne diferencijalne jednačine i veoma su komplikovane za rješavanje. Dosadašnja iskustva su pokazala da Navier - Stokes - ove jednačine opisuju strujanje tzv. Njutnovskih fluida veoma precizno. Za veoma malu klasu problema strujanja kao što su potpuno razvijeno strujanje u jednostavnim geometrijama kao što su strujanje između paralelnih ploča ili u pravoj cijevi postoji analitičko rješenje Navier - Stokes - ovih jednačina. Ovakva jednostavna strujanja su važna da se shvate fundamenti strujanja i transfera energije, ali sa praktične tačke gledišta nemaju neki veći značaj. U svim slučajevima kada je moguće odrediti analitičko rješenje mnogi od članova u jednačinama se zanemaruju, što nekada može biti veoma gruba aproksimacija. U većini slučajeva jednačine se moraju posmatrati sa svim članovima, a tada analitička rješenja nisu moguća, i jedina mogućnost za njihovo rješavanje je primjena odgovarajuće numeričke metode za diskretizaciju. U nastavku će biti prikazani neka specifična strujanja i pojednostavljene jednačine koje ih opisuju.

### 1.6.1. Strujanje nestišljivog fluida

U osnovnim jednačinama održanja podrazumijeva se da su i fizička svojstva fluida promjenjiva u vremenu i prostoru. U mnogim konkretnim slučajevima može se smatrati da su gustina i viskoznost fluida konstantni i u prostoru i vremenu. Ova aproksimacija se može uzeti kao približno tačna ne samo za strujanje tečnosti, već i za strujanje gasova kod kojih je Ma broj ispod 0.3. Takva vrste strujanja se obično zovu nestišljiva strujanja. Ako je strujanje još izotermno tada je i promjena viskoziteta jednaka nuli. Za naprijed navedene slučajeve jednačine o održanju mase, količine kretanja (za x, y i z pravac) i energije imaju sledeći oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + S_x, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + S_y, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + S_z, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla \left( \frac{\lambda}{c_p} \nabla T \right) + q'''. \quad (1.23)$$

Jednačine (1.19) - (1.23) ne predstavljaju neko značajno pojednostavljenje polaznih jednačina ali ipak su jednostavnije za rešavanje od polaznih jednačina.

### 1.6.2. Strujanje neviskoznog fluida

Za strujanja koja se odigravaju dovoljno daleko od granične površine uticaj viskoznosti fluida može biti zanemarljiv. To znači da se tenzor napona svodi samo na sile pritiska, pa se u tom slučaju polazne jednačine transformišu u tzv. Euler - ove jednačine strujanja:



$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u) = -\frac{\partial P}{\partial x} + b_x, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w v) = -\frac{\partial P}{\partial y} + b_y, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) = -\frac{\partial P}{\partial z} + b_z. \quad (1.27)$$

Kada se zanemari viskoznost fluida fluid nije "ljepljiv" za zidove koji ga okružuju pa se može smatrati da se fluid "kliza" duž zidova. Euler-ove jednačine često se koriste za opisivanje strujanja stišljivog fluida pri visokim Ma brojevima. Pri velikim brzinama strujanja viskozni i efekti turbulencije imaju značaj samo u uskoj zoni uz granični zid dok je u velikom dijelu domena strujanje praktično bez uticaja viskoznih sila. Bez obzira na uprošćenje vezano za viskozne članove Euler - ove jednačine nisu jednostavne za rješavanje, uslijed činjenice da je granični sloj mali potrebno je dodatno uzeti ga u razmatranje sa nekom adaptiranom mrežom.

### 1.6.3. Potencijalno strujanje

Jedno od najjednostavnijih oblika strujanja je tzv. Potencijalno strujanje. Fluid se podrazumijeva da je neviskoznan (kao i za slučaj Euler - ovih jednačina), sa jednim dodatnim uslovom da je strujanje bezvrtložno tj:

$$\text{rot} \vec{V} = 0. \quad (1.28)$$

Iz ovog uslova dolazi se do toga da postoji strujni potencijal  $\Phi$ , takav da brzina može biti definisana kao:

$$\vec{V} = -\text{grad} \Phi, \quad (1.29)$$

pa jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid dobija oblik Laplasove jednačine napisane za potencijal  $\Phi$ :

$$\text{div}(\text{grad} \Phi) = 0. \quad (1.30)$$

Jednačina o održanju količine kretanja se transformiše u Bernulijevu jednačinu koja je algebarska jednačina koja se lako rješava kada je poznata strujna funkcija  $\Phi$ . Za svaki poznati strujni potencijal  $\Phi$  moguće je odrediti strujnu funkciju ( $\Psi$ ), takvu da vektori brzine imaju tangenti pravac na linije strujne funkcije. Linije strujne funkcije su normalne na pravac linija konstantnog potencijala. Potencijalno strujanje jeste važno ali ne i toliko realno u praksi.

#### 1.6.4 Bousinesq – ova aproksimacija

Kada je strujanje izazvano razmjenom toplote koju fluid ostvaruje sa okolinom kao što je slučaj sa prirodnom konvekcijom, fizičke karakteristike fluida su funkcije temperature najčešće. Promjena gustine sa temperaturom može izazvati strujanje fluida, koje nije intezivno kao kod prinudnog strujanja izazvanog različitim vrstama spoljašnjih sila. Promjena gustine je relativno mala pa se obično zanemaruje u konvektivnom i nestacionarnom članu, i opisuje se najčešće kao gravitaciona sila u izvornom članu. Ova aproksimacija se najčešće zove Bousinesq – ova aproksimacija. Pozdrzumijeva se da se gustina mijenja linerano sa promjenom temperature pa važi sledeća relacija:

$$(\rho - \rho_0)g = -\rho_0 g \beta_T (T - T_0), \quad (1.31)$$

gdje je  $\rho_0$  referentna gustina za temperaturu  $T_0$  dok je  $\beta_T$  zapreminski koeficijent širenja fluida. Gravitacioni član na desnoj strani jednačine (1.31) obično se dodaje na desnu stranu momentne jednačine za  $y$  pravac (pravac u kojem postoje gravitacione sile) tako da jednačina dobija oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho wv) = \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g \beta_T (T - T_0) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Treba napomenuti da se u slučaju postojanja Bousinesq – ovog člana jednačine o održanju mase i količine kretanja moraju simultano rješavati sa energijskom jednačinom u cilju određivanja temperaturskog polja, a potom i poslednjeg člana na desnoj strani jednačine (1.32) koji je odgovoran za strujanje fluida. Zapreminska sila

u x pravcu je obično jednaka nuli ( $b_x=0$ ) osim ako fluid nije pod uticajem nekog spolja nametnutog polja sila (centrifugalne, elektromagnetne i sl.). Takođe promjena gustine fluida moguća je i uslijed promjene koncentracije fluida ako se radi o nekom rastvoru, što je čest slučaj naročito kod strujanja koje se odigrava tokom livenja legura, kao klasičnog primjera strujanja fluida čija gustina izrazito zavisi od koncentracije tečnosti.